Title	多重L関数の解析接続について (解析接続の応用)
Author(s)	石川, 秀明
Citation	数理解析研究所講究録 (2000), 1155: 162-167
Issue Date	2000-05
URL	http://hdl.handle.net/2433/64140
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
1155 巻 2000 年 162-167

多重 L 関数の解析接続について

石川 秀明 (Hideaki Ishikawa)
新潟大学大学院自然科学研究科 D2

1. 導入

Euler - Zagier 多重ゼータ関数なるものを次の様に定義する:

$$\zeta_k(s_1,\ldots,s_k)=\sum_{0<n_1<\cdots<n_k}\frac{1}{n_1^{s_1}n_2^{s_2}\ldots n_k^{s_k}} \tag{1}$$

ここで $s_i(i=1,2,\ldots,k)$ は複素数。この級数は $\Re(s_i)\geq 1\ (i=1,2,\ldots,k-1)$ かつ $\Re(s_k)>1$ であれば絶対収束しているので、その範囲においては k 変数複素数の正則関数を与えている。多くの数学者によって、自然数 $a_i,(i=1,\ldots,k)$ を代入した特殊値 $\zeta_k(a_1,\ldots,a_k)$ が研究されてきた。そのような研究は古くは L.Euler にさかのぼり、現在では D.Zagier[12] [13] や T.Arakawa & M.Kaneko [3] 等が幾つかの興味深い研究を行っている。 最近では物理方面との関係も指摘されている。

一方、F.V.Atkinson は Riemann ゼータ関数の平均的挙動を研究する際に $\zeta_2(s_1,s_2)$ を詳しく調べた [4] 。以後、ゼータ関数の平均値定理においてこのアトキンソンのアイディアを深めた仕事が多く行われている [9] [11] 。(1) の解析接続に関して言うと、二変数の場合にはアトキンソンが行っている。$k\geq 3$ の場合の解析接続に関しては J. Zhao [14], そして S.Akiyama, S.Egami and Y.Tanigawa [1] の仕事がある。

記号 $\chi_i \mod q(i=1,2,\ldots,k)$ で $\mod q$ の Dirichlet 指標を表し単位指標を χ_0 とする。$\beta_i(i=1,2,\cdots,k)$ は実数で半開区間 $[0,1)$ に含まれるとする。では多重ゼータ関数 (1) の一般化として、以下にあげる二つのタイプの関数を定義しよう:

$$L_k(s_1,\ldots,s_k\,|\,\chi_1,\ldots,\chi_k)=\sum_{0<n_1<\cdots<n_k}\frac{\chi_1(n_1)}{n_1^{s_1}}\frac{\chi_2(n_2)}{n_2^{s_2}}\cdots\frac{\chi_k(n_k)}{n_k^{s_k}}, \tag{2}$$

$$\zeta_k(s_1,\ldots,s_k\,|\,\beta_1,\ldots,\beta_k)=\sum_{0<n_1<\cdots<n_k}\frac{1}{(n_1+\beta_1)^{s_1}(n_2+\beta_2)^{s_2}\ldots(n_k+\beta_k)^{s_k}}, \tag{3}$$

ここで $n_i\in\mathbb{N}\ (i=1,\ldots,k)$。もし $\Re(s_i)\geq 1\ (i=1,2,\ldots,k-1)$ かつ $\Re(s_k)>1$ であれば絶対収束していてその領域では正則関数を与えることが直に分かる。これらをそれぞれ「多重 L 関数」「多重 Hurwitz ゼータ関数」と呼ぶことにして、ときおり $L_k(s_i\,|\,\chi_i)$ 、$\zeta_k(s_i\,|\,\beta_i)$ と表記することとする。

現在、私の指導教官の S.Akiyama との共同研究として、この二つの関数を研究中である。本公演では、その解析接続に関してまとめたものがある [2] ので、その内容を中心に報告した。

Remark 1. 最近 K.Matsumoto は次のような級数を定義し研究を行った [10]:

$$\begin{aligned}&\zeta_k(v_1,\ldots,v_k;\quad \alpha_1,\ldots,\alpha_k;\quad w_1,\ldots,w_k)\\ &=\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_k=0}^{\infty}(m_1w_1+\alpha_1)^{-v_1}(m_1w_1+m_2w_2+\alpha_2)^{-v_2}\\ &\quad\times\cdots\times(m_1w_1+m_2w_2+\cdots+m_kw_k+\alpha_k)^{-v_k}\end{aligned} \tag{4}$$

ここで $v_1,\ldots,v_k,w_1,\ldots,w_k$ は複素数値で $|\arg w_j|<\pi$、$w_j\neq 0(1\leq j\leq k)$。そして $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ は正の実数値とする。この級数は、その特別な場合として (1) や (3) を含んでいる。K. Matsumoto は変数 w_i の漸近展開を論じる課程でこの級数 (4) で定義される多変数関数の解析接続を行った。そこではメリンーバーンズ型の積分が有効に用いられた。その方法は変数 w_i の情報を得るための非常に見通しのよい証明も同時に与える。この解析接続時にメリンーバーンズ型の積分を利用するという発想は、M. Katsurada が最初に発見し深めたアイディアである(正確には M. Katsurada は

(4) とは少し形が違う級数の研究にこのメリンーバーンズ型の積分を利用することを思い付いた [8])。

Remark 2. 級数 (2) に対して「多重 L 関数」という言葉を用いたが、T. Arakawa と M. Kaneko は (1) の一般化として

$$
\begin{aligned}
&ML(s_1,\ldots,s_k)= \\
(5)\qquad &\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{n_k=1}^{\infty}\frac{\chi_1(n_1)}{n_1^{s_1}}\frac{\chi_2(n_2)}{(n_1+n_2)^{s_2}}\cdots\frac{\chi_k(n_k)}{(n_1+\cdots+n_k)^{s_k}}
\end{aligned}
$$

なる「多重 L 関数」を定義し、研究している。そこでは解析接続、特殊値の研究が行われている。

2. Euler -Maclaurin の和公式と補題

j 番目のベルヌーイ多項式 $B_j(x)$ は次のように定義する：

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{B_j(x)}{j!}t^j.$$

j 番目の周期的ベルヌーイ多項式は$\tilde{B}_j(x)=B_j(x-[x])$ で与える。ここで $[x]$ は x を超えない最大の整数。ベルヌーイ数 B_r は $B_r=B_r(0)$ で定義する。

関数 $f(x)$ は $l+1$ 回微分可能で $f^{l+1}(x)$ は連続とする。そして $N_1,N_2\in\mathbb{N}$ で η は実数とする。Stieltjes 積分を用いて

$$
\begin{aligned}
\sum_{N_1+\eta<n\le N_2} f(n) &= \int_{N_1+\eta}^{N_2} f(x)d[x] \\
&= \int_{N_1+\eta}^{N_2} f(x)dx-\int_{N_1+\eta}^{N_2} f(x)d(x-[x]+1/2) \\
&= \int_{N_1+\eta}^{N_2} f(x)dx-[f(x)\tilde{B}_1(x)]_{N_1+\eta}^{N_2}+\int_{N_1+\eta}^{N_2} f'(x)\tilde{B}_1(x)dx.
\end{aligned}
$$

部分積分を繰り返して、

The modified Euler-Maclaurin summation formula

$$
\begin{aligned}
\sum_{N_1+\eta<n\le N_2} f(n) &= \int_{N_1+\eta}^{N_2} f(x)dx+\frac{1}{2}f(N_2)+f(N_1+\eta)\tilde{B}_1(\eta) \\
(6)\qquad &\quad +\sum_{r=1}^{l}\frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!}\Big(B_{r+1}f^{(r)}(N_2)-f^{(r)}(N_1+\eta)\tilde{B}_{r+1}(\eta)\Big) \\
&\quad -\frac{(-1)^{l+1}}{(l+1)!}\int_{N_1+\eta}^{N_2} f^{(l+1)}(x)\tilde{B}_{l+1}(x)dx.
\end{aligned}
$$

Remark 3. ここで $\eta=0$ の時は, 等式 (6) は普通の Euler-Maclaurin の和公式である。この パラメータ η を付けた状態で書いておくことが (たったそれだけのことではあるが)、後で (2) と (3) の解析接続をするとき重要な役割を演じる。

この多少の変形を加えた Euler-Maclaurin の和公式 (6) から直ちに次の補題が従う。

Lemma 1. l と N_1 は整数でα と η は実数とする。そして

$$\Phi_l(s\,|N_1+\eta,\alpha)=\frac{(s)_{l+1}}{(l+1)!}\int_{N_1+\eta}^{\infty}\frac{\tilde{B}_{l+1}(x)}{(x+\alpha)^{s+l+1}}dx$$

と

$$(s)_r=\begin{cases}s(s+1)(s+2)\dots(s+r-1) & \text{if}\quad r\geq 1\\ 1 & \text{if}\quad r=0\\ (s-1)^{-1} & \text{if}\quad r=-1\end{cases},$$

を定義する。この時我々は次のような式を得る：

$$\sum_{N_1+\eta<n}^{\infty}\frac{1}{(n+\alpha)^s}=\sum_{-1\leq r}^{l}\frac{\tilde{B}_{r+1}(\eta)}{(r+1)!}\frac{(s)_r}{(N_1+\alpha+\eta)^{s+r}}-\Phi_l(s\mid N_1+\eta,\alpha).$$

また積分 $\Phi_l(s\mid N_1+\eta,\alpha)$ の大きさは

$$\Phi_l(s\mid N_1+\eta,\alpha)\ll\frac{1}{(N_1+\eta+\alpha_1)^{(\Re s+l+1)}}.$$

のように評価できる。

3. 得られた結果

まず以後の議論で用いる記号を幾つか定義しておこう。記号 $\mathbb{N}$、$\mathbb{Z}$、$\mathbb{Q}$、$\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$、でそれぞれ自然数、有理整数、有理数、実数、複素数全体の集合とする。集合の右下に添え字を $A_{\leq *}$ のように表したら、それは集合 A の元で大きさが$*$ 以下のもの全体とする。例えば $\mathbb{Z}_{\leq\ell}=\{n\in\mathbb{Z}\mid n\leq\ell\}$ である。

Theorem 1. 多重 L 関数 $L_k(s_i|\chi_i)$ は $\mathbb{C}^k$ に有理型に解析接続できて、その *possible singularities* は

$$s_k=1,\quad \sum_{i=1}^{j}s_{k-j+1}\in\mathbb{Z}_{\leq j}\ (j=2,3,...,k).$$

特に $k=2$ の場合は singularities の状況を詳しく知ることが出来て

Corollary 1. $L_2(s_i\,|\,\chi_i)$ は $\mathbb{C}^2$で有理型で、次の領域で正則

$$(7)\qquad\begin{cases}\{(s_1,s_2)\in\mathbb{C}^2\ \mid s_1+s_2\notin\mathbb{Z}_{\leq 2},\quad s_2\neq 1\} & \text{if}\quad \chi_1=\chi_0,\quad \chi_2=\chi_0\\ \{(s_1,s_2)\in\mathbb{C}^2\ \mid s_1+s_2\notin\mathbb{Z}_{\leq 1},\quad s_2\neq 1\} & \text{if}\quad \chi_1\neq\chi_0,\quad \chi_2=\chi_0\\ \{(s_1,s_2)\in\mathbb{C}^2\ \mid s_1+s_2\notin\mathbb{Z}_{\leq 1}\} & \text{if}\quad \chi_2\neq\chi_0,\end{cases}$$

ここで除外された領域は *possible singularities*。用いる指標 χ_1 と χ_2 は原始的で、さらに $\chi_1\chi_2\neq\chi_0$ なる条件を満たしていると仮定すると、この時 $L_2(s_i\,|\,\chi_i)$ は次の領域で正則

$$(8)\qquad\begin{cases}\{(s_1,s_2)\in\mathbb{C}^2\ \mid s_1+s_2\neq 0,-2,-4,-6,-8,\dots\} & \text{if}\quad \chi_1\chi_2(-1)=1,\\ \{(s_1,s_2)\in\mathbb{C}^2\ \mid s_1+s_2\neq 1,-1,-3,-5,-7,\dots\} & \text{if}\quad \chi_1\chi_2(-1)=-1,\end{cases}$$

ここで除外された集合は *the whole set of singularities* となる。

Theorem 2. 多重 *Hurwitz* ゼータ関数$\zeta_k(s\,|\,\beta)$ は $\mathbb{C}^k$ で有理型であり、*'possible' singularities* は

$$(9)\qquad s_k=1,\qquad \sum_{i=1}^{j}s_{k-i+1}\in\mathbb{Z}_{\leq j}\ (j=2,3,\dots,k).$$

ここで用いるβ_1 が全て有理数であると仮定すると、この時は *'possible'* をさらに詳しく調べることが出来る。もし$\beta_{k-1}-\beta_k$ が 0 でも 1/2 でもないとすると、その時は

上述の（9）は真に *singularities* の位置そのものを与えている。もし $\beta_{k-1}-\beta_k=1/2$ であれば、

$$\begin{aligned} s_k &= 1 \\ s_{k-1}+s_k &= 2,0,-2,-4,-6,\ldots \\ \sum_{i=1}^{j} s_{k-i+1} &\in \mathbb{Z}_{\le j} \quad \textit{for } j=3,4,\ldots,k \end{aligned}$$

が真に *singularities* の位置そのものを与える。もし $\beta_{k-1}-\beta_k=0$ ならば、

$$\begin{aligned} s_k &= 1 \\ s_{k-1}+s_k &= 2,1,0,-2,-4,-6,\ldots \\ \sum_{i=1}^{j} s_{k-i+1} &\in \mathbb{Z}_{\le j} \quad \textit{for } j=3,4,\ldots,k \end{aligned}$$

が真に *singularities* の位置そのものを与える。

Remark 4. Theorem 2 では $\beta_i-\beta_{i+1}$ $(i=1,\ldots,k-1)$ が有理数の場合だけを論じているが、その他の場合でも面倒なことは起こらず、singularities の位置について記述できる。

また多重 L 関数の $k\ge 3$ については、残念ながら singularities の状況を $k=2$ の時のように詳しく述べることが出来ないのが現状である。

4. 多重 L 関数の解析接続（定理 1 の証明の概略）

解析接続を行おう。最初に 2 重 L 関数の場合でそのアイディアを見せることにする。

$$M_k(s_1,\ldots,s_k)= \sum_{m_1=0}^{\infty}\frac{1}{(m_1+\frac{a_1}{q})^{s_1}}\sum_{m_1+\frac{a_1-a_2}{q}<m_2}^{\infty}\frac{1}{(m_2+\frac{a_2}{q})^{s_2}}\cdots \cdots\sum_{m_{k-2}+\frac{a_{k-2}-a_{k-1}}{q}<m_{k-1}}^{\infty}\frac{1}{(m_{k-1}+\frac{a_{k-1}}{q})^{s_{k-1}}}\sum_{m_{k-1}+\frac{a_{k-1}-a_k}{q}<m_k}^{\infty}\frac{1}{(m_k+\frac{a_k}{q})^{s_k}}$$

なる級数を定義し、これを用いて

$$L_2(s_i\,|\,\chi_i)=\frac{1}{q^{s_1+s_2}}\sum_{a_1=1}^{q-1}\sum_{a_2=1}^{q-1}\chi_1(a_1)\chi_2(a_2)M_2(s_1,s_2). \tag{10}$$

今、

$$M_2(s_1,s_2)=\sum_{m_1=0}^{\infty}\frac{1}{(m_1+a_1/q)^{s_1}}\sum_{m_1+\frac{a_1-a_2}{q}<m_2}\frac{1}{(m_2+a_2/q)^{s_2}}$$

であり、我々は $M_2(s_1,s_2)$ の解析接続を行いたい。そこで、この中の級数

$$\sum_{m_1+\frac{a_1-a_2}{q}<m_2}\frac{1}{(m_2+a_2/q)^{s_2}}$$

に Lemma 1 を適用することで

$$
\begin{aligned}
&M_2(s_1, s_2) \\
&= M_1(s)\left(\sum_{-1\le r}^{l} \frac{\tilde{B}_{r+1}(\frac{a_1-a_2}{q})}{(r+1)!}\frac{(s_2)_r}{(m_1+\frac{a_1}{q})^{s_2+r}} - \Phi_l(s_2\,|\,n_1+\frac{a_1-a_2}{q}, \frac{a_2}{q})\right) \\
&= \sum_{-1\le r}^{l} \frac{\tilde{B}_{r+1}(\frac{a_1-a_2}{q})}{(r+1)!}(s_2)_r \sum_{m_1=0}^{\infty} \frac{1}{(m_1+\frac{a_1}{q})^{s_1+s_2+r}} \\
&\qquad\qquad - \sum_{m_1=0}^{\infty} \frac{\Phi_l(s_2\,|\,m_1+\frac{a_1-a_2}{q}, \frac{a_2}{q})}{(m_1+\frac{a_1}{q})^{s_1}} \qquad (11) \\
&= \sum_{-1\le r}^{l} \frac{\tilde{B}_{r+1}(\frac{a_1-a_2}{q})}{(r+1)!}(s_2)_r \zeta(s_1+s_2+r, \frac{a_1}{q}) - \sum_{m_1=0}^{\infty} \frac{\Phi_l(s_2\,|\,m_1+\frac{a_1-a_2}{q}, \frac{a_2}{q})}{(m_1+\frac{a_1}{q})^{s_1}}.
\end{aligned}
$$

ここで Hurwitz ゼータ関数 $\zeta(z,\alpha)$ は $\mathbb{C}$ で有理型なので、(11) の最後の式は二項目の級数

$$
\sum_{m_1=0}^{\infty} \frac{\Phi_l(s_2\,|\,m_1+\frac{a_1-a_2}{q}, \frac{a_2}{q})}{(m_1+\frac{a_1}{q})^{s_1}} \tag{12}
$$

がどのような領域で有理型であるのかを確めればよい。この級数 (12) は領域 $\Re(s_1+s_2+l)>0$ で絶対収束しているので、そこで正則。そして l は任意に大きく選んでもいいので、いくらでも接続可能な領域を広げていける。よって $L_2(s_i\,|\,\chi_i)$ を $\mathbb{C}^2$ に有理型に解析接続できたといえる。

二重の場合で成功したこのような接続のテクニックは $k\ge 3$ でも通用する。

$$
L_k(s_i\,|\,\chi_i) = \frac{1}{q^{s_1+\cdots+s_k}} \sum_{a_1=1}^{q-1}\sum_{a_2=1}^{q-1}\cdots\sum_{a_k=1}^{q-1} \chi_1(a_1)\chi_2(a_2)\ldots\chi_k(a_k)M_k(s)
$$

として $M_k(s)$ に Lemma 1 を繰り返して適用してやれば良い。

□

Theorem 2 も Theorem 1 と同様なテクニックで得られる。詳しくは [2] を参照。

5. 数論への応用

ここで次のような関数を考える：

$$
L_j(s) = \sum_{0<n_1<..,<n_k} \frac{\chi_1(n_1)\chi_2(n_2)...\chi_j(n_j)}{(n_1\quad n_2\quad \ldots\quad n_j)^s} \quad (\Re s>1). \tag{13}
$$

これは関数 (2) の特別な場合に当たる。そして 次のような和を考えてみる：

$$
H_j(x) = \sum_{\substack{n_1\ldots n_j\le x\\ n_1<\cdots<n_j}} \chi_1(n_1)\ldots\chi_j(n_j).
$$

現在私はこの和 $H_j(x)$ の研究に取り組んでいます。$x\to\infty$ とした時に、この和 $H_j(x)$ はどの様な挙動を見せるだろうか？。$H_j(x)$ の挙動を調べるとき、関数 (13) の解析的な性質を知るこが重要になってきます。例えば pole はあるのか？あるとすればその位置は？そこでの留数は求まるか？$|L_j(s)|$ の虚軸方向での大きさはどう評価できるか？関数等式はあるか？などを研究中です。

References

[1] S. Akiyama, S. Egami, and Y. Tanigawa , An analytic continuation of multiple zeta functions and their values at non-positive integers, preprint

[2] S. Akiyama, H.Ishikawa, On analytic continuation of multiple L-functions and related zeta-functions , preprint

[3] T.Arakawa and M.Kaneko, Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions, to appear in Nagoya Math. J.

[4] F.V. Atkinson, The mean value of the Riemann zeta-function, *Acta Math.*, **81** (1949), 353-376.

[5] K. Dilcher, Zero of Bernoulli, generalized Bernoulli and Euler polynomials, Memoirs of American Mathematical Society, number 386.

[6] S. Egami, *Introduction to multiple zeta function*, Lecture Note at Niigata University (in Japanese).

[7] K. Inkeri, The real roots of Bernoulli polynomials, *Ann. Univ. Turku. Ser. A I* **37** (1959), 20pp.

[8] M. Katsurada, An application of Mellin-Barnes' type integrals to the mean squaare of Lerch zeta-functions, *Collect. Math.*, **48** (1997)

[9] M. Katsurada and K. Matsumoto, Asymptotic expansions of the mean values of Dirichlet L-functions. *Math. Z.*, **208** (1991), 23–39.

[10] K. Matsumoto, Asymptotic expansions of double zeta-functions of Barnes, of Shintani, and Eisenstein series, preprint.

[11] Y. Motohashi, A note on the mean value of the zeta and L-functions. I, *Proc. Japan Acad.*, Ser. A Math. Sci. **61** (1985), 222–224.

[12] D. Zagier, Values of zeta functions and their applications, *First European Congress of Mathematics*, Vol. II, Birkhäuser, (1994) 210–220

[13] D. Zagier, Periods of modular forms, traces of Hecke operators, and multiple zeta values, *Research into automorphic forms and L functions (in Japanese) (Kyoto, 1992), Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku*, **843** (1993), 162–170.

[14] J. Zhao, Analytic continuation of multiple zeta functions, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.